Wintersemester 2010/2011
Vorlesung: Mo 09:45-11:15 | Prof. Dr. B. Eick
Übung: Do 09:45-11:15 (zweiwöchentlich) | M. Neumann-Brosig

Übungsaufgaben zur Vorlesung Lie-Algebren

Blatt 4

Abgabe am 03. Januar in der Vorlesung
Termin der vierten Übung: 06. Januar

1. Für gegebenes $S \in \mathbf{gl}(n, \mathbb{C})$ sind die Lie-Unteralgebren $\mathbf{gl}_S(n, \mathbb{C})$ durch

$$\mathbf{gl}_S(n, \mathbb{C}) := \{x \in \mathbf{gl}(n, \mathbb{C}) |\ x^t S + Sx = 0\}$$

definiert. Es seien folgende Matrizten gegeben:

$$S_{2l} := \begin{pmatrix} 0 & I_l \\ I_l & 0 \end{pmatrix},\ S_{2l+1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_l \\ 0 & I_l & 0 \end{pmatrix},\ T_{2l} := \begin{pmatrix} 0 & I_l \\ -I_l & 0 \end{pmatrix}.$$

Beschreiben sie die folgenden Lie-Algebren explizit, und bestimmen Sie deren Dimension:

a) die Lie-Algebren $\mathbf{so}(2l, \mathbb{C}) := \mathbf{gl}_{S_{2l}}(2l, \mathbb{C})$,
b) die Lie-Algebren $\mathbf{so}(2l+1, \mathbb{C}) := \mathbf{gl}_{S_{2l+1}}(2l+1, \mathbb{C})$ und
c) die Lie-Algebren $\mathbf{sp}(2l, \mathbb{C}) := \mathbf{gl}_{T_{2l}}(2l, \mathbb{C})$.

2. Sei L eine Lie-Algebra und A eine Lie-Unteralgebra von L. Der *Normalisator* von A, bezeichnet mit $N_L(A)$, ist definiert als

$$N_L(A) := \{x \in L |\ [x, a] \in A \text{ für alle } a \in A\}.$$

Beweisen Sie, dass der Normalisator von A eine Unteralgebra von L ist, A enthält. Zeigen Sie außerdem, dass $N_L(A)$ die größte Unteralgebra von L ist, in der A ein Ideal ist.

3. Weisen Sie nach: für $a, y \in \mathbf{gl}(V)$ und jedes $m \geq 1$ gilt die Gleichung

$$ay^m = y^m a + \sum_{k=1}^{m} \left(\begin{array}{c} m \\ k \end{array} \right) y^{m-k} a_k,$$

wobei a_k induktiv definiert ist durch $a_1 = [a, y]$ und $a_k = [a_{k-1}, y]$. Folgern Sie die Gleichung

$$ad\, y^m = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} \left(\begin{array}{c} m \\ k \end{array} \right) y^{m-k} (ad\, y)^k.$$

Hier wirkt y^{m-k} auf $\mathbf{gl}(V)$ als die linere Abbildung, die $x \in \mathbf{gl}(V)$ auf xy^{m-k} abbildet.

4. Sei L eine komplexe Lie-Algebra. Zeigen Sie, dass L genau dann nilpotent ist, wenn jede zweidimensionale Lie-Unteralgebra von L abelsch ist.