Wintersemester 2010/2011
Vorlesung: Mo 09:45-11:15 | Prof. Dr. B. Eick
Übung: Do 09:45-11:15 (zweiwöchentlich) | M. Neumann-Brosig

Übungsaufgaben zur Vorlesung Lie-Algebren

Blatt 2

Abgabe am 22. November in der Vorlesung
Termin der zweiten Übung: 25. November

1. Seien D und E Derivationen einer Algebra A mit Multiplikation
$$A \times A \to A : (x, y) \mapsto x \cdot y.$$
   a) Zeigen Sie, dass $[D, E] = D \circ E - E \circ D$ eine Derivation von A ist.
   b) Beweisen Sie die Leibnitz-Regel:
$$\forall x, y \in A : D^n(x \cdot y) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} D^r(x) \cdot D^{n-r}(y).$$
   Dabei ist $D^0 = id_A$ und $D^{i+1} = D \circ D^i$ für $i \in \mathbb{N}_0$.

2. Seien L_1 und L_2 Lie-Algebren. Zeigen Sie, dass L_1 und L_2 genau dann isomorph sind, wenn Basen B_1 von L_1 und B_2 von L_2 existieren, sodass die Strukturkonstanten von L_1 bzgl. B_1 und von L_2 bzgl. B_2 identisch sind.

3. Welche Paare der folgenden Lie-Algebren sind isomorph?
   a) Die Lie-Algebra $(\mathbb{R}^3, \times)$ (siehe Blatt 1, Aufgabe 1)
   b) Die Lie-Algebra $\mathbf{b}(2, \mathbb{R})$ der oberen 2×2-Dreiecksmatritzen über $\mathbb{R}$
   c) Die Lie-Algebra $\mathbf{n}(3, \mathbb{R})$ der strikten oberen 3×3-Dreiecksmatritzen über $\mathbb{R}$
   d) Die Lie-Algebra $L := \{x \in gl(3, \mathbb{R}) : x^t = -x\}$. Dabei ist x^t die zu x transponierte Matrix.

4. Berechnen sie für die Lie-Algebra $\mathbf{n}(3, \mathbb{R})$ der strikten oberen 3×3-Dreiecksmatritzen über $\mathbb{R}$ mit Basis
$$B := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$
die Kommutatoralgebra $\mathbf{n}(3, \mathbb{R})'$, das Zentrum $Z(\mathbf{n}(3, \mathbb{R}))$ sowie die Strukturkonstanten von $\mathbf{n}(3, \mathbb{R})$ bzgl. B.