Übungsblatt 9

Darstellungstheorie, Dr. Max Horn, WS 2010

Abgabe am Montag, den 24.01.2011 nach der Vorlesung

Aufgabe 1. Es seien G eine endliche Gruppe, $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$, $m := \exp(G)$, $\varepsilon \in \mathbb{C}$ eine primitive m-te Einheitswurzel und $K := \mathbb{Q}(\varepsilon)$. Sie können im Folgenden ohne Beweis folgendes verwenden: Ist $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$, dann existiert eine K-Darstellung von G mit Charakter χ.

a) Es sei $\zeta_n = e^{2\pi i/n}$ mit $n := |G|$. Weiter sei σ ein Automorphismus des Körpers $\mathbb{Q}(\zeta_n)$. Man definiere $\chi^\sigma : G \to \mathbb{C}$ via $\chi^\sigma(g) := \chi(g)^\sigma$. Zeigen Sie, dass χ^σ ein Charakter ist und dass dieser genau dann irreduzibel ist, wenn dies für χ zutrifft.

b) Genau dann ist $\chi(g) \in \mathbb{Z}$ für alle $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$, wenn g und g^i in G konjugiert sind für alle $i \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(|g|, i) = 1$.

c) Die Einträge der Charaktertafel der symmetrischen Gruppe S_n sind aus $\mathbb{Z}$.

Aufgabe 2. Es seien $H \subseteq G$ und χ ein Charakter (nicht notwendigerweise irreduzibel) von G mit $\chi(g) = 0$ für alle $g \in G \setminus H$. Wir nehmen weiter an, dass $H = 1$ oder G abelsch ist. Zeigen Sie, dass $[G : H]$ ein Teiler von $\chi(1)$ ist.

Hinweis: Es sei λ ein irreduzibler Konstituent von χ_H. Für G abelsch, finden Sie einen irreduziblen Charakter $\mu \in \mathrm{Irr}(G)$ mit $\mu_H = \lambda$. Berechnen Sie $[\chi, \mu]$ und folgern Sie daraus $[G : H] | [\chi_H, \lambda]$.

Aufgabe 3. a) Bestimmen Sie den Normalteilerverband der Gruppe G, deren Charaktertafel wie folgt gegeben sei. Dabei sei $\rho := \sqrt{-2} \in \mathbb{C}$.

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	-1	1	1	1	-1	-1
χ_3	2	-1	$\cdot$	2	-1	2	$\cdot$	$\cdot$
χ_4	2	-1	$\cdot$	-2	1	$\cdot$	ρ	$-\rho$
χ_5	2	-1	$\cdot$	-2	1	$\cdot$	$-\rho$	ρ
χ_6	3	$\cdot$	-1	3	$\cdot$	-1	1	1
χ_7	3	$\cdot$	1	3	$\cdot$	-1	-1	-1
χ_8	4	1	$\cdot$	-4	-1	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$

b) Man bestimme die Charaktertafel und den Isomorphietyp der zentralen Faktorgruppe von G.