Übungsblatt 10

Darstellungstheorie, Dr. Max Horn, WS 2010

Abgabe am Montag, den 07.02.2011 nach der Vorlesung

Es sei G eine endliche Gruppe.

Aufgabe 1. Es seien $|G'| = p$ prim und $G' \leq Z(G)$. Zeigen Sie, dass $\chi(1)^2 = [G : Z(G)]$ für jeden nichtlineare Charakter $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst: $\chi(g) = 0$ für alle $g \in G \setminus Z(G)$.

Aufgabe 2. Es seien $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ treu, $H \leq G$ und $\chi_H \in \mathrm{Irr}(H)$. Zeigen Sie, dass $C_G(H) = Z(G)$ gilt.

Aufgabe 3. Es sei G eine abelsche Gruppe und $\hat{G} = \mathrm{Irr}(G)$.

a) Zeigen Sie, dass $\hat{G}$ eine abelsche Gruppe ist unter der Multiplikation: $\lambda \cdot \chi : G \to \mathbb{C}, g \mapsto \lambda(a) \cdot \chi(g)$ für $\lambda, \chi \in \hat{G}$.

b) Für $H \leq G$ sei $H^\perp := \{\lambda \in \hat{G} \mid H \subseteq \ker(\lambda)\}$ Zeigen Sie, dass $\perp$ eine Bijektion von der Menge der Untergruppen von G in die Untergruppen von $\hat{G}$ ist.

c) Zeigen Sie $G \cong \hat{G}$.

Aufgabe 4. Es seien $A < G$ abelsch und $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ mit $\chi(1) = [G : A]$. Zeigen Sie, dass G einen nichttrivialen, abelschen Normalteiler hat.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst: $\chi(g) = 0$ für alle $g \in G \setminus A$.

Aufgabe 4 ist freiwillig. Die in dieser Aufgabe erreichten Punkte werden allerdings zusätzlich angerechnet.