Übungsblatt 8

Darstellungstheorie, Dr. Max Horn, WS 2010

Abgabe am Montag, den 10.01.2011 nach der Vorlesung

Aufgabe 1. Man bestimme die Charaktertafeln der Gruppen A_4 und S_4.

Aufgabe 2. Es sei G eine endliche Gruppe und A eine abelsche Untergruppe.

a) Es sei χ ein Charakter von G und $\mathcal{X}$ die dazu gehörige Darstellung. Es gelte $\ker(\mathcal{X}) = \{a \in \mathbb{C}G \mid \mathcal{X}(a) = E\} = \{1\}$. Man zeige: Eine Untergruppe H von G ist genau dann abelsch, wenn $\chi\downarrow_H$ (die Einschränkung des Charakters χ auf H) die Summe eindimensionaler Charaktere von H ist.

b) Es sei $g \in G$. Man zeige: das Element g ist genau dann zu seinem Inversen konjugiert, wenn $\chi(g)$ reell für alle irreduziblen Charaktere $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ ist.

c) Es sei χ ein Charakter von A. Man zeige

$$\sum_{x \in A} |\chi(x)|^2 \geq |A|\chi(1).$$

d) Es sei $[G : A] = n$. Man zeige: es gilt $\chi(1) \leq n$ für alle $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$.

Aufgabe 3. Es seien G eine endliche Gruppe, $C_1, \ldots, C_k$ ihre Konjugiertenklassen und X ihre Charaktertafel. Man zeige: Es gilt $\det(X)^2 = \varepsilon |G|^k \cdot (|C_1| \cdots |C_k|)^{-1}$ mit $\varepsilon \in \{-1, +1\}$.

Jede Aufgabe hat 4 Punkte.