Übungsblatt 7

Darstellungstheorie, Dr. Max Horn, WS 2010

Abgabe am Montag, den 10.01.2011 nach der Vorlesung

Aufgabe 1. Es sei $D_8 := \langle (1,2)(3,4), (1,3) \rangle \leq S_4$ die Diedergruppe der Ordnung 8.

a) Bestimmen Sie die Charaktertafel von D_8.

b) Es sei Q_8 die Quaternionengruppe der Ordnung, vgl. letztes Übungsblatt. Zeigen Sie: Es gilt $\mathbb{C}D_8 \cong \mathbb{C}Q_8$ als $\mathbb{C}$-Algebren, aber $\mathbb{R}D_8 \ncong \mathbb{R}Q_8$ als $\mathbb{R}$-Algebren.

Aufgabe 2. Es seien F ein Körper, G eine endliche Gruppe sowie $\mathcal{X} : FG \to F^{n\times n}$ und $\mathcal{Y} : FG \to F^{m\times m}$ Matrixdarstellungen. Ferner sei $T : F^{n\times m} \to F^{n\times m} : Z \mapsto \sum_{g\in G} \mathcal{X}(g)Z\mathcal{Y}(g^{-1})$.

a) Zeigen Sie: Für alle $Z \in F^{n\times m}$ und $g \in G$ gilt $\mathcal{X}(g)T(Z) = T(Z)\mathcal{Y}(g)$.

b) Es seien $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$ nicht-äquivalente irreduzible Darstellungen. Zeigen Sie: Für alle $1 \leq i,j \leq n$ und $1 \leq k,l \leq m$ gilt

$$\sum_{g\in G} \mathcal{X}(g)_{ij}\mathcal{Y}(g^{-1})_{kl} = 0.$$

Im Folgenden seien F ein Zerfällungskörper für FG, so dass $\operatorname{char}(F)$ kein Teiler von $|G|$ ist, und $\mathcal{X}$ irreduzibel. (Ein Körper F heißt Zerfällungskörper für eine F-Algebra A, falls $\operatorname{End}_A(V) \cong F$ für alle einfachen A-Moduln V gilt.)

c) Zeigen Sie: Es ist $\operatorname{char}(F)$ kein Teiler von n, und für alle $1 \leq i,j,k,l \leq n$ gilt

$$\sum_{g\in G} \mathcal{X}(g)_{ij}\mathcal{X}(g^{-1})_{kl} = \delta_{il}\delta_{jk}\frac{|G|}{n}.$$

Hinweis: Man verwende das Lemma von Schur.

d) Für alle $1 \leq i \leq n$ sei

$$e_i^{\mathcal{X}} := \frac{n}{|G|} \cdot \sum_{g\in G} g \cdot \mathcal{X}(g^{-1})_{ii} \in FG.$$

Zeigen Sie: Für alle $1 \leq i,j \leq n$ gilt $e_i^{\mathcal{X}} e_j^{\mathcal{X}} = \delta_{ij} e_i^{\mathcal{X}}$. Ist $\mathcal{Y}$ irreduzibel und nicht äquivalent zu $\mathcal{X}$, so gilt $e_i^{\mathcal{X}} e_j^{\mathcal{Y}} = 0$ und $e_j^{\mathcal{Y}} e_i^{\mathcal{X}} = 0$ für alle $1 \leq i \leq n$ und $1 \leq j \leq m$.

Hinweis: Man verwende den Satz von Artin-Wedderburn.

e) Zeigen Sie: Es ist $1 = \sum_{\mathcal{X}} \sum_{i=1}^{\mathrm{Grad}(\mathcal{X})} e_i^{\mathcal{X}}$ eine primitive orthogonale Zerlegung der $1 \in FG$. Dabei läuft die Summation über die Äquivalenzklassen irreduzibler Darstellungen $\mathcal{X}$ von G.

Aufgabe 3. Es seien K ein Körper und A eine K-Algebra. Weiter sei V ein n-dimensionaler A-Modul. Mit V^* ist der duale Vektorraum bezeichnet. Die zum A-Modul V gehörige Darstellung sei mit $\delta : A \to K^{n\times n}$ bezeichnet. Den dualen Vektorraum kann man als

A-Linksmodul auffassen: $v^{a.\lambda} := (v.a)^\lambda$ für $a \in A$, $\lambda \in V^*$ und $v \in V$. Wir fassen nun V als K-Vektorraum auf. Es seien $a \in A$ mit $0 < \text{Kern}(\delta(a)) \leq V$ und $p \in K[X]$ ein Teiler des Minimalpolynoms von $\delta(a)$. Man zeige:

V ist genau dann einfach, wenn folgende Aussagen gelten:

a) für alle $0 \neq v \in \text{Kern}(p(\delta(a)))$ gilt $vA = V$;

b) es existiert ein $0 \neq v' \in \text{Kern}(p(\delta(a)^*))$ mit $Av' = V^*$.

Weiter zeige man: falls p irreduzibel ist und $\dim_k(\text{Kern}(p(\delta(a)))) = \deg(p)$, so kann a) ersetzt werden duch

a') es existiert ein $0 \neq v \in \text{Kern}(p(\delta(a)))$ mit $vA = V$.

Aufgabe 4. Mithilfe der vorausgehenden Aufgabe, bearbeiten Sie die Aufgabe 1 c) vom 5. Übungsblatt.

Wir wünschen Euch Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!

Jede Aufgabe hat 4 Punkte.