Übungsblatt 6

Darstellungstheorie, Dr. Max Horn, WS 2010

Abgabe am Montag, den 13.12. nach der Vorlesung

Aufgabe 1. Man bestimme alle irreduziblen Charaktere der Diedergruppe $G = D_{2n}$ der Ordnung $2n$ ($n \geq 3$) in folgenden Schritten:

a) Man kann zunächst ohne Beweis verwenden: $G = \langle x, y \rangle$ wird erzeugt durch ein Element x (Drehung) der Ordnung n und ein Element y (Spiegelung) der Ordnung 2, mit der Relation $yxy = x^{-1}$. Jedes Element von G ist eindeutig von der Form x^i oder yx^i ($0 \leq i \leq n-1$).

b) Es sei $\varepsilon = e^{2\pi i/n}$ und es sei $t \in \mathbb{N}$, $1 \leq t < n/2$. Definiere $\varphi_t(x^i) = \begin{pmatrix} \varepsilon^{ti} & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-ti} \end{pmatrix}$ und $\varphi_t(yx^i) = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon^{-ti} \\ \varepsilon^{ti} & 0 \end{pmatrix}$ für $0 \leq i \leq n-1$. Die φ_t sind paarweise nicht äquivalente, irreduzible Darstellungen für $1 \leq t < n/2$.

c) Die Kommutatorgruppe G' hat die Ordnung $n/2$ bzw. n, je nachdem ob n gerade oder ungerade ist.

d) Die Anzahl der Konjugiertenklassen von G ist $(n/2 - 1) + 4$ bzw. $(n-1)/2 + 2$, je nachdem ob n gerade oder ungerade ist.

Aufgabe 2. Es seien G eine endliche Gruppe sowie χ ein beliebiger $\mathbb{C}$-Charakter von G und λ ein lineare $\mathbb{C}$-Charakter von G. Man zeige: Das Produkt $\chi\lambda : G \to \mathbb{C} : g \mapsto \chi(g)\lambda(g)$ ist ebenfalls ein Charakter, der genau dann irreduzibel ist, wenn χ irreduzibel ist.

Aufgabe 3. Es sei

$$Q_8 := \langle \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \rangle \leq \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}).$$

a) Man bestimme die irreduziblen Darstellungen von $\mathbb{C}Q_8$ und die zugehörigen Charaktere von Q_8.

Hinweis: Man bestimme zunächst die linearen Charaktere.

b) Man bestimme eine irreduzible Darstellung $\mathcal{X} : \mathbb{R}Q_8 \to \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ mit $\dim_{\mathbb{R}}(V) = 4$.

Hinweis: Man gehe von der definierenden $\mathbb{C}$-Darstellung von Q_8 aus, und beachte $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$.

c) Man berechne den Schiefkörper $E := \mathrm{End}_{\mathbb{R}Q_8}(V)$. Man zeige: Es gilt $\mathcal{X}(\mathbb{R}Q_8) \cong E^{\mathrm{opp}}$ als $\mathbb{R}$-Algebren. Um welchen Schiefkörper handelt es sich somit?

Hinweis: Man vergleiche den (alternativen) Beweis des Satzes von Artin-Wedderburn aus der Übung (bzw. siehe Sonstiges auf der Homepage).

Jede Aufgabe hat 4 Punkte.