Übungsblatt 5

Darstellungstheorie, Dr. Max Horn, WS 2010

Abgabe am Montag, den 13.12. nach der Vorlesung

Aufgabe 1. Es seien K ein Körper und A_5 die alternierende Gruppe auf 5 Punkten.

a) Man zeige: Es ist $A_5 = \langle (1,2,3), (1,2,3,4,5) \rangle$.

b) Man zeige, dass durch

$$(1,2,3) \mapsto \begin{pmatrix} \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (1,2,3,4,5) \mapsto \begin{pmatrix} \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

eine Matrixdarstellung $\mathcal{X}$ von A_5 definiert wird.

c) Für welche Körper ist $\mathcal{X}$ irreduzibel?

Hinweis zu (b), (c): Man betrachte eine geeignete Permuationsdarstellung.

Aufgabe 2. Es seien S_3 die symmetrische Gruppe auf 3 Punkten und $A = \mathbb{Q}S_3$ der Gruppenring von S_3 über $\mathbb{Q}$. Ferner seien $A_i := e_i A$ für $1 \leq i \leq 5$, wobei $e_1, e_2, e_3, e_4 \in A$ gegeben seien durch

$$\begin{aligned} e_1 &:= \frac{1}{6}(1 + (1,2) + (1,3) + (2,3) + (1,2,3) + (1,3,2)), \\ e_2 &:= \frac{1}{6}(1 - (1,2) - (1,3) - (2,3) + (1,2,3) + (1,3,2)), \\ e_3 &:= \frac{1}{3}(1 + (1,3) - (2,3) - (1,2,3)), \\ e_4 &:= \frac{1}{3}(1 - (1,3) + (2,3) - (1,3,2)). \end{aligned}$$

a) Man zeige: Es ist $e_1+e_2+e_3+e_4 = 1$ und für alle $i \neq j$ gilt $e_i^2 = e_i$ und $e_i e_j = 0$. Daraus folgere man, dass $A = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus A_4$ als A-Moduln gilt.

b) Man zeige, dass A_3 und A_4 als A-Moduln isomorph zueinander sind.

c) Man zeige: A_1, A_2 und A_3 sind paarweise nicht-isomorphe einfache A-Moduln. Man bestimme die zugehörigen Charaktere von S_3.

d) Man zeige: Jeder einfache A-Modul ist zu einem A_i isomorph.

Aufgabe 3. Es seien K ein Körper, G eine Gruppe, V und W endlich-dimensionale KG-Moduln, sowie $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$ die von V bzw. W induzierten Darstellungen von G. Man zeige: $\mathcal{X}$ ist genau dann äquivalent zu $\mathcal{Y}$, wenn V und W als KG-Moduln isomorph sind.

Jede Aufgabe hat 4 Punkte.