Übungsblatt 3

Darstellungstheorie, Dr. Max Horn, WS 2010

Abgabe am Montag, den 29.11. nach der Vorlesung

Aufgabe 1. Es sei A der Matrizenring $M_2(\mathbb{C})$, welcher ebenfalls eine $\mathbb{C}$-Algebra ist mit einer Basis bestehend aus den Elementarmatrizen E_{11}, E_{12}, E_{21} und E_{22}.

a) Zeigen Sie, dass die folgende, lineare Abbildung wohldefiniert ist: $\rho : A \to \mathrm{End}_A(A^\circ)$, $a \mapsto \rho_a$ mit $\rho_a : A \to A$, $b \mapsto ab$. Ist diese Abbildung ein $\mathbb{C}$-Algebrenhomomorphismus?

b) Konstruieren Sie mit der Abbildung ρ einen nichttrivialen $\mathbb{C}$-Algebrenhomomorphismus von A nach $\mathrm{End}_A(A^\circ)$.

Aufgabe 2. Es seien K ein Körper und A eine K-Algebra. Das Ideal $J(A)$, welches auf dem Übungsblatt 2 definiert wurde, nennt man auch Jacobsonradikal. Zeigen Sie:

a) Das Jacobsonradikal $J(A)$ ist der Durchschnitt aller maximalen Untermoduln von A;

b) Folgende Aussagen sind äquivalent

   (a) $J(A) = 0$;

   (b) A hat keine nichttriviale nilpotente Rechtsideale;

   (c) A hat keine nichttriviale nilpotente Ideale;

   (d) A ist halbeinfach.

Aufgabe 3. Es sei G eine endliche p-Gruppe. Zeigen Sie, dass die Einheitengruppe vom Ring $\mathbb{F}_pG$ der Menge $\mathbb{F}_p^* \cdot (1 + I(\mathbb{F}_pG))$ entspricht. Um dies zu zeigen, gehen Sie schrittweise vor. Der Gruppenring $\mathbb{F}_pG$ hat G als $\mathbb{F}_p$-Basis. Die Gruppe G operiert auf sich selbst via Rechtsmultiplikation, d.h. es existiert ein Gruppenhomomorphismus $G \to \mathrm{GL}_{|G|}(\mathbb{F}_p)$. Dieser induziert einen $\mathbb{F}_p$-Algebrenhomomorphismus $\varphi : \mathbb{F}_pG \to M_{|G|}(\mathbb{F}_p)$. Es sei $a := \sum_{g\in G} a_g g \in \mathbb{F}_pG$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

a) $a \in (\mathbb{F}_pG)^*$;

b) $\det(\varphi(a)) \neq 0$;

c) $\sum a_g \neq 0$;

und folgern Sie damit die Behauptung.

Jede Aufgabe hat 4 Punkte.