Übungsblatt 2

Darstellungstheorie, Dr. Max Horn, WS 2010

Abgabe am Montag, den 15.11. nach der Vorlesung

Aufgabe 1. Es sei A eine Algebra und V ein A-Modul. Zeige:

V ist genau dann vollständig reduzibel, wenn der Schnitt aller maximalen Untermodulen von V trivial ist.

Aufgabe 2. Es seien G eine endliche Gruppe und V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{C}G$-Modul.

a) Man zeige: Auf V existiert eine positiv definite hermitesche Form $(\cdot,\cdot)$, für die $(gv, gw) = (v, w)$ für alle $g \in G$, $v, w \in V$ gilt.

b) Daraus folgere man, dass V halbeinfach ist.

Aufgabe 3. Es sei G eine endliche Gruppe und K ein Körper. Ein linearer Charakter ist ein Algebrenhomomorphismus vom Gruppenring KG nach K. Zeigen Sie, dass die Anzahl der Linearen Charaktere endlich ist, und dass die Gruppen G und G/G' die gleiche Anzahl an linearen Charakteren haben.

Aufgabe 4. Es sei A eine Algebra und es sei

$$J(A) := \{a \in A \mid Va = 0 \text{ für alle irreduziblen } A\text{-Moduln } V\}.$$

Zeigen Sie:

a) $J(A)$ ist ein Ideal von A.

b) $VJ(A) \subsetneqq V$ für jeden A-Modul $V \neq \{0\}$.

c) $J(A)$ ist nilpotent.

d) Falls I ein nilpotentes Rechtsideal von A ist, dann ist I in $J(A)$ enthalten.

Jede Aufgabe hat 4 Punkte.