Übungsblatt 1

Darstellungstheorie, Dr. Max Horn, WS 2010

Abgabe am Dienstag, den 09.11. nach der Vorlesung

Aufgabe 1. Es seien K ein Körper und G eine endliche Gruppe.

$$\sigma : KG \to K, \sum_{g \in G} \alpha_g g \mapsto \sum_{g \in G} \alpha_g.$$

a) Zeigen Sie, dass σ ein K-Algebren-Homomorphismus ist. Es sei $I(G) := \text{Ker}(\sigma) = \left\{ \sum_{g \in G} \alpha_g g \mid \sum_{g \in G} \alpha_g = 0 \right\}$. Das Ideal $I(G)$ bezeichnet man auch als **Augmentationsideal** von KG.

b) Es sei N ein Normalteiler von G. Man zeige, dass $KG/(KG \cdot I(N))$ isomorph zu $K(G/N)$ als K-Algebren ist.

c) Man zeige, dass $\{g - 1 \mid g \in G \setminus \{1\}\}$ eine Basis von $I(G)$ ist.

Aufgabe 2. Es sei H eine Untergruppe von der endlichen Gruppe G und K ein Körper.

Zeige:

a) $KG \cdot I(H) = \{\sum_{x \in H} x_h(h-1) \mid x_h \in KG\}$;

b) $\{u(h-1) \mid u \in U, h \in H \setminus \{1\}\}$ ist eine Basis von $KG \cdot I(H)$, wobei U ein Vertretersystem der Linksnebenklassen G/H bezeichnet;

c) $KG \cdot I(H)$ ist genau dann ein Ideal in KG, wenn H ein Normalteiler von G ist.

Aufgabe 3. Es seien p eine Primzahl, G eine endliche p-Gruppe und K ein Körper der Charakterstik p. Man zeige, dass das Ideal $I(G)$ nilpotent ist.

Hinweis: Induktion über die Gruppenordnung.

Aufgabe 4. Es sei S_3 die symmetrische Gruppe vom Grad 3 und K ein Körper.

a) Bestimme eine Basis vom Zentrum $Z(KS_3)$.

b) Es seien $x := 1 + (1,2) + (1,3) + (2,3) + (1,2,3) + (1,3,2)$ und $y = -1 + (1,2) + (1,3) + (2,3) - (1,2,3) - (1,3,2)$. Man zeige, dass Kx und Ky Ideale in KG sind.

Jede Aufgabe hat 4 Punkte.