`Alternativer Beweis für den Struktursatz von Artin-Wedderburn:`

`Dies ist ein Textauszug aus einer Vorlesung. In dieser Vorlesung wurde Linksmultiplikation und nicht Rechtsmultiplikation verwendet.`

(0.1) Definition
Sei R ein Ring mit 1. Dann heißt $R^{opp} := (R, +, *)$ mit $r * s := sr$ für $s, r \in R$ der zu R *oppositäre* Ring. ■

(0.2) Bemerkung
$A \cong (\mathrm{End}_A({}_AA))^{opp}$.

Beweis: Für $a \in A$ sei $\varrho_a : A \to A$, $b \mapsto ba$ die Rechtsmultiplikation mit $a \in A$. Dann ist $\varrho_a \in \mathrm{End}_A({}_AA)$ (Assoziativgesetz: $\varrho_a(bc) = (bc)a = b(ca) = b\varrho_a(c)$).

$\psi : A \to (\mathrm{End}_A({}_AA))^{opp}, a \mapsto \varrho_a$, ist ein K-Algebrenhomomorphismus: $\varrho_a + \varrho_b = \varrho_{a+b}$ ist klar, und $\varrho_a * \varrho_b = \varrho_{ab}$ wegen $\varrho_{ab}(c) = c(ab) = (ca)b = \varrho_b(ca) = \varrho_b(\varrho_a(c)) = (\varrho_b \circ \varrho_a)(c) = (\varrho_a * \varrho_b)(c)$.

ψ ist injektiv: $\varrho_a = \varrho_b \Rightarrow a = \varrho_a(1) = \varrho_b(1) = b$. ψ ist surjektiv: sei $\varphi \in \mathrm{End}_A({}_AA)$, $a := \varphi(1)$ $\Rightarrow \varphi(b) = \varphi(b1) = b\varphi(1) = ba = \varrho_a(b)$. ■

(0.3) Bemerkung
Sei V ein A-Modul, $V_i \leq V$ $(1 \leq i \leq l)$ mit $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_l$. Setze

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{l1} & \cdots & \varphi_{ll} \end{pmatrix} | \varphi_{ij} \in \mathrm{Hom}_A(V_j, V_i) \right\}.$$

B ist mit der üblichen Matrixmultiplikation eine K-Algebra und es gilt $\mathrm{End}_A(V) \cong B$.

Beweis: Seien $(\varphi_{ij}), (\psi_{ij}) \in B$. $(\varphi_{ij}) + (\psi_{ij}) = (\varphi_{ij} + \psi_{ij}) \in B$, da $\mathrm{Hom}_A(V_j, V_i)$ ein K-Vektorraum ist.

$(\varphi_{ij})(\psi_{ij}) = (\tau_{ij})$ mit $\tau_{ij} = \sum_{k=1}^{l} \underbrace{\varphi_{ik} \circ \psi_{kj}}_{\in \mathrm{Hom}_A(V_i, V_j)}$.

Für $1 \leq i \leq l$ sei $\pi_i : V \to V_i$ die Projektion auf V_i, und $\mu_i : V_i \to V$ die Einbettung. Für $\varphi \in \mathrm{End}_A(V)$ und $1 \leq i, j \leq l$ ist $\pi_i \circ \varphi \circ \mu_j \in \mathrm{Hom}_A(V_j, V_i)$. Die Abbildung $\mathrm{End}_A(V) \to B$, $\varphi \mapsto (\pi_i \circ \varphi \circ \mu_j)_{1 \leq i,j \leq l}$ ist ein K-Algebrenisomorphismus.

(0.4) Hauptsatz (Struktursatz von Artin-Wedderburn für halbeinfache Algebren)
Sei A halbeinfach und K Zerfällungskörper von A. Seien $S_1, \ldots, S_n$ Vertreter der Isomorphieklassen einfacher A-Moduln, $m_i := \dim_K(S_i)$ $(1 \leq i \leq n)$. Setze

$$A_i := \sum_{S \leq_A A,\ S \cong S_i} S \leq {}_AA \quad (1 \leq i \leq n).$$

Dann ist A_i auch $\leq A_A$ (d.h. A_i ist zweiseitiges Ideal) für alle $1 \leq i \leq n$, und es gelten:

(1) $A = \bigoplus_{i=1}^n A_i$ (direkte Summe von Algebren)[1]

(2) $A_i \cong K^{m_i \times m_i}$ für alle $1 \le i \le n$

(3) $\dim_K(A) = \sum_{i=1}^n m_i^2$

(4) $n = \dim_K(Z(A))$.

Beweis: Die Behauptungen (3) und (4) folgen aus (1) und (2): für (4) verwende noch $Z(K^{m_i \times m_i})$ $= \{\alpha \cdot E_{m_i} | \alpha \in K\}$, was aus LA I bekannt ist.

Vorüberlegungen:

(i) $A_i \le A_A$: Sei $S \le {}_A A$, S einfach, und $a \in A$. $\Rightarrow Sa = \{0\}$ oder $\cong S$ als A-Moduln.

(ii) $A_i \cong V_1 \oplus \cdots \oplus V_{n_i}$ mit $V_j \le A_i$, $V_j \cong S_i$ für $1 \le j \le n_i$, denn:

Seien $V_1, \ldots, V_{n_i} \le A_i$ mit

(a) $V_j \cong S_i$, $1 \le j \le n_i$

(b) $\sum_{j=1}^{n_i} V_j$ ist direkt (also $\dim \sum V_j = \sum \dim V_j$)

(c) n_i maximal mit den Eigenschaften (a) und (b).

Dann ist $A_i = V_1 \oplus \cdots \oplus V_{n_i}$, denn sonst existiert ein $S \le A_i$, $S \cong S_i$ mit $S \not\le V_1 \oplus \cdots \oplus V_{n_i}$. Es folgt $S \cap (V_1 \oplus \cdots \oplus V_{n_i}) = \{0\}$, da S einfach ist. Dies ist ein Widerspruch zur Maximalität von n_i.

Beweisabschluss:

(1) $A_i \cap A_j = \{0\}$ für alle $1 \le i \ne j \le n$: wäre $S \le A_i \cap A_j$, S einfach, dann wäre $S \cong S_i$ und $S \cong S_j$ wegen (ii). Damit folgt mit (i): $A_i A_j \subseteq A_i \cap A_j = \{0\}$ für alle $1 \le i \ne j \le n$. Zusammen: $A = \bigoplus_{i=1}^n A_i$.

(2) $\mathrm{Hom}_A(V_j, V_k) \cong K$, falls $V_j, V_k \cong S_i$, denn K ist Zerfällungskörper.

Wegen (0.3) folgt $\mathrm{End}_A(A_i) \cong K^{n_i \times n_i}$. Aus $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_n$ und $A_j A_i = \{0\}$ für $j \ne i$ folgt $\mathrm{End}_A(A_i) \supseteq \mathrm{End}_{A_i}(A_i)$ (und $\subseteq$ ist klar).

$K^{n_i \times n_i} \cong (K^{n_i \times n_i})^{opp}$ (via Transponierung). Mit (0.2): $A_i \cong \mathrm{End}_{A_i}(A_i)^{opp} \cong K^{n_i \times n_i}$.

Mit (ii) ergibt sich: $n_i^2 = \dim_K(A_i) = m_i n_i \Rightarrow m_i = n_i$ (da $n_i \ne 0$). ■

[1]Anmerkung zu Punkt (1) von Satz (0.4): sind $B, C \le A$ mit $A = B \oplus C$, d.h. $A = B + C$ und $B \cap C = \{0\}$, dann ist die Struktur von A vollständig durch B und C bestimmt, denn wegen $BC \subseteq B \cap C$ gilt $BC = \{0\}$, also $(b+c)(b'+c') = bb' + cc'$ für alle $b, b' \in B, c, c' \in C$. Zerlegt man noch $1 = e_B + e_C$ mit $e_B \in B, e_C \in C$, dann folgt $e_B b = (e_b + e_C)b = 1b = b$ für alle $b \in B$. In (1) aus dem Satz von Artin-Wedderburn bestimmen die A_i die Struktur von A (als Algebra!) also vollständig.